



CONTINUITÉ

Exercice1

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0

Exercice2

On considère que la fonction f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \left(E\left(\frac{1}{x}\right) + E\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour laquelle la fonction f est continue en 0

Exercice3

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 + 2x) \sin\left(\frac{2}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[; |f(x) - f(0)| \leq 3|x|$
2. Étudier la continuité de la fonction f au point 0

Exercice4

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x}{a}\right) E\left(\frac{b}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{b}{a} \end{cases}$$

où a et b sont des nombres réels strictement positifs

1. a) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \frac{b}{a} - \frac{x}{a} < f(x) \leq \frac{b}{a}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_-^*; \frac{b}{a} \leq f(x) < \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$
- b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^*; \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \left| \frac{x}{a} \right|$
2. a) Déterminer la limite de f au point 0
- b) La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice5

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x+1}{5-x} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 2$

CONTINUITÉ



Exercice 6 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = E\left(\frac{1}{x}\right) \sin x ; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\\ f(x) = \frac{x^2}{2(1 - \cos x)} ; x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f dans $x_0 = 0$

Exercice 7 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{|x| - E(x)}}{x^2}$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f
2. Soit k un entier relatif non nul
 - a) Etudier la continuité de la fonction f à droite puis à gauche en k (Etudier les cas $k > 0$ et $k < 0$)
 - b) Etudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle $]k, k+1[$
3. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
4. a) Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2}$
 - b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty, 0[; 0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2}$
 - c) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice 8 Soit n un entier naturel. On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = \frac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} / \{1\} ; f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k - 1}{x - 1}$
2. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^k - 1}{x - 1} \right) = k$
3. La fonction f est-elle continue en 1 ?